

# Esquema de calificación

**Noviembre de 2018**

**Matemáticas**

**Nivel medio**

**Prueba 1**

20 pages

Este esquema de calificaciones es propiedad del Bachillerato Internacional y **no** debe ser reproducido ni distribuido a ninguna otra persona sin la autorización del centro global del IB en Cardiff.

## Instrucciones para los Examinadores

### Abreviaturas

- M** Puntos concedidos por tratar de utilizar un Método correcto; el procedimiento (es decir, el razonamiento que se ha seguido y los cálculos realizados) tiene que estar incluido.
- (M)** Puntos concedidos por el **Método** utilizado; dicho método puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- A** Puntos concedidos por una Respuesta (en inglés, Answer) o por Precisión (en inglés, Accuracy); a menudo dependen de los puntos M precedentes.
- (A)** Puntos concedidos por una **Respuesta** o por **Precisión**; dicha respuesta/precisión puede inferirse de un procedimiento posterior **correcto**.
- R** Puntos concedidos por un **Razonamiento** claro.
- N** Puntos concedidos por respuestas **correctas** cuando no se muestra **ningún** procedimiento.
- AG** Respuesta dada (del inglés answer given) en la propia pregunta, por lo que no se concede ningún punto.

### Uso del esquema de calificación

#### 1 General

Se deberá calificar siguiendo las instrucciones que aparecen en RM Assessor

#### 2 Puntuación por Método y por Respuesta/Precisión

- **No** conceda automáticamente la puntuación máxima cuando la respuesta sea correcta; es **obligatorio** comprobar todo el procedimiento y puntuar la pregunta conforme al esquema de calificación.
- No se puede conceder **M0** seguido de **A1**, puesto que los puntos **A** dependen de los puntos **M** precedentes, de haber alguno. Una excepción a esta regla es el caso en el que no se haya incluido ningún desarrollo que permita conceder un **M1**, a diferencia de aquellos casos en los que el método utilizado haya sido incorrecto (véase el punto 4).
- Cuando se indica en la misma línea una puntuación **M** y otra **A** (p. ej., **M1A1**), esto normalmente significa que se conceda **M1** por **intentar** utilizar un método adecuado (p. ej., sustitución en una fórmula) y **A1** por utilizar los valores **correctos**.
- Cuando existen dos o más puntuaciones **A** en la misma línea, se pueden otorgar de forma independiente; de manera que si el primer valor es incorrecto, pero los dos siguientes son correctos, se otorga **A0A1A1**.
- Cuando en el esquema de calificación se especifica **(M2)**, **N3**, etc., **no** separe las notas, a menos que
- exista una observación
- La mayoría de las puntuaciones **M** se han de conceder por el empleo de un método **válido**; es decir, de un método capaz de conducir a la respuesta que pide el enunciado. Por ello, dicho método ha de propiciar algún tipo de avance en pos de la respuesta.
- Una vez que aparezca en la hoja la respuesta correcta a una pregunta o a un apartado de una pregunta, ignore cualquier desarrollo adicional correcto. Sin embargo, si el desarrollo adicional revela falta de comprensión matemática, no conceda el **A1** final.

### 3 Puntos **N**

*Si no se muestra ningún desarrollo, otorgue puntos **N** a las respuestas correctas. En ese caso, ignore la distribución de notas (**M**, **A**, **R**).*

- **No** otorgue una mezcla de notas **N** y otras notas
- Pueden existir menos notas **N** disponibles que el total de notas **M**, **A** y **R**; esto se hace de forma deliberada para penalizar a los alumnos por no seguir las instrucciones respecto a que muestren el trabajo.
- Es posible que no exista una relación directa entre las puntuaciones **N** y las puntuaciones implícitas. Hay veces en las que todos los puntos que hay en juego son implícitos, pero la puntuación **N** no es la máxima puntuación: esto indica que queremos que el alumno plasme parte del desarrollo del ejercicio, sin especificar cuál.
- Para ser coherentes con el esquema de calificación, la puntuación **N** se indica para cada apartado, incluso en aquellos casos en los que coincida con el desglose de puntos **M**, **A** y **R**.
- Si un alumno muestra un trabajo incorrecto que, de algún modo, le lleva a la respuesta correcta, **no** se deben otorgar puntos **N** a esa respuesta correcta. Sin embargo, si el alumno ha indicado (generalmente tachándolo) que el trabajo debe ser ignorado, otorgue los puntos **N** a la respuesta correcta.

### 4 Puntuaciones implícitas

*Las puntuaciones implícitas se muestran entre paréntesis; p. ej., (**M1**).*

- Las puntuaciones implícitas solo se pueden conceder si el alumno ha incluido el desarrollo del ejercicio o si dicho desarrollo queda implícito en apartados subsiguientes de la pregunta (el que el alumno haya dado una respuesta final correcta no implica necesariamente que se le tengan que conceder todos los puntos implícitos que hay en juego). Hay preguntas en las que es necesario plasmar algo de desarrollo, pero puesto que se acepta que no todo el mundo vaya a escribir los mismos pasos, todos los puntos que hay en juego son implícitos, pero la puntuación **N** no es la máxima puntuación asignada a la pregunta
- Normalmente el desarrollo correcto del ejercicio aparece escrito en la línea siguiente.
- Allí donde se haya asignado un (**M1**) seguido de un **A1** para cada respuesta correcta, si no se incluye el desarrollo del ejercicio una respuesta correcta será prueba suficiente para poder conceder el (**M1**).

*Las puntuaciones ‘se ha de ver’ aparecen en el esquema **sin paréntesis**; p. ej., **M1**.*

- Las puntuaciones ‘se ha de ver’ solo se pueden conceder si se ha incluido el desarrollo del ejercicio (cálculos realizados/razonamiento seguido).
- Si una puntuación ‘se ha de ver’ dada no se ha concedido porque no se hubiera incluido el desarrollo del ejercicio (a diferencia de **MO** o **AO**, que se conceden cuando el desarrollo mostrado sea incorrecto), en ese caso sí que se pueden conceder todas las puntuaciones subsiguientes si resulta pertinente.

## 5 Puntuación de arrastre de error (FT)

Las puntuaciones de arrastre de error (**FT**, del inglés *follow-through*) se conceden cuando tras dar una respuesta —final o intermedia— incorrecta en uno de los **apartados** de una pregunta, dicha respuesta se utiliza correctamente en apartados o subapartados **posteriores** de esa pregunta. Por lo general, para poder conceder puntos de arrastre de error (**FT**), **el alumno tiene que haber incluido el desarrollo del ejercicio** (es decir, los cálculos/razonamientos que ha seguido); no puede haberse limitado a dar una respuesta final basada en esa respuesta incorrecta que dio en el apartado anterior. Sin embargo, si en un subapartado dado los únicos puntos que tiene asignados son por la respuesta **final** que se dé, en ese caso sí se deberían conceder puntos **FT** si resulta pertinente. Se espera que los examinadores comprueben el desarrollo del ejercicio que ha incluido el alumno antes de concederle puntos **FT** allí donde resulte pertinente.

- Dentro de un apartado dado, una vez que se ha cometido un **error** ya no se pueden conceder más puntos **A** a otras partes del desarrollo que hagan uso de ese error. Sin embargo, sí se pueden conceder puntos **M** y **R** si resulta pertinente. (No obstante, tal y como se indicó anteriormente, si no se concedió una puntuación **A** determinada porque no se había incluido el desarrollo del ejercicio, en ese caso sí que se pueden conceder las puntuaciones subsiguientes si resulta pertinente).
- Las excepciones a esta regla se indicarán explícitamente en el esquema de calificación.
- Si la pregunta resulta mucho más sencilla debido a un error, entonces se ha de utilizar el propio criterio para otorgar menos puntos **FT**.
- Si el error lleva a un valor inadecuado (por ejemplo, probabilidad mayor que 1, uso de  $r > 1$  para la suma infinita de una progresión geométrica,  $\theta = 1,5$ , un valor no entero cuando se requiere un entero), entonces no se debe otorgar la puntuación de la respuesta final.
- En el esquema de calificación puede aparecer la expresión “del alumno” en una descripción, para indicar que el alumno podría estar utilizando un valor incorrecto.
- Un alumno comete un error en un apartado, pero obtiene la respuesta o respuestas correctas en los apartados posteriores, se otorgan puntos cuando proceda, a menos que la pregunta diga a partir de lo anterior. Con frecuencia, es posible utilizar en apartados posteriores un enfoque distinto, que no depende de la solución obtenida en los apartados previos.
- En una pregunta de tipo «mostrar que», si un error cometido en un subapartado anterior hace que el alumno no pueda mostrar la respuesta requerida (la dada en el enunciado), en ese caso no conceda el **A1** final. Tenga presente que si dicho error se comete dentro del mismo subapartado, las reglas del arrastre de errores (**FT**) quizá conduzcan a la pérdida de puntos adicionales

## 6 Error de lectura

*Si un alumno copia de forma incorrecta la información de la pregunta, se considera un error de lectura (MR). A un alumno sólo se le puede penalizar una vez por un error de lectura dado. Utilice el sello **MR** para indicar que se trata de un error de lectura. No conceda el primer punto que haya en juego en dicha pregunta, incluso aunque se trate de una puntuación **M**, pero sí que conceda todas las restantes (si resulta pertinente), para que así el alumno solo pierda un punto por el error de lectura cometido.*

- Si la pregunta resulta mucho más sencilla debido al error de lectura (MR), entonces se ha de utilizar el propio criterio para otorgar menos puntos.
- Si el error de lectura (**MR**) lleva a un valor inadecuado (por ejemplo, probabilidad mayor que 1, uso de  $r > 1$  para la suma infinita de una progresión geométrica,  $\text{sen}\theta = 1,5$ , un valor no entero cuando se requiere un entero), entonces no se debe otorgar la puntuación de la respuesta final.
- El error que el alumno pueda cometer al copiar su propio trabajo **no** constituye un error de lectura, sino un error.

## 7 Puntuación discrecional (d)

*En las contadas ocasiones en las que el esquema de calificación no cubra el procedimiento incluido por el alumno, el examinador utilizará su propio criterio para conceder una puntuación apropiada. En esos casos se ha de utilizar la anotación DM y, al lado de la puntuación, se ha de escribir una **nota** breve en la que se explique el porqué de esta decisión.*

## 8 Métodos alternativos

*En ocasiones, los alumnos utilizan métodos distintos de aquellos que aparecen en el esquema de calificación. A menos que en la pregunta se especifique qué método se ha de utilizar, el uso de métodos alternativos correctos no se ha de penalizar, sino que se han de puntuar en sintonía con lo que indica el esquema de calificación. Si tiene alguna duda al respecto, póngase en contacto con el jefe de equipo (su team leader) y pídale consejo.*

- Cuando para toda una pregunta se incluyen varios métodos alternativos, estos aparecen señalados mediante los encabezamientos **MÉTODO 1**, **MÉTODO 2**, etc.
- Las soluciones alternativas para un apartado de una pregunta se indican mediante el encabezamiento **O BIEN... O BIEN**. Siempre que sea posible, también se empleará la alineación del texto (sangría del párrafo) como recurso para que el examinador pueda identificar más fácilmente dónde comienzan y dónde terminan las distintas alternativas.

## 9 Formas alternativas

*A menos que en la pregunta se especifique lo contrario, **acepte** formas equivalentes.*

- Dado que se trata de un examen internacional, acepte todas las formas alternativas de **notación**.
- En el esquema de calificación, las formas **numéricas** y **algebraicas** equivalentes aparecen generalmente escritas entre paréntesis, justo a continuación de la respuesta.
- En el esquema de calificación, las respuestas **simplificadas** (que los alumnos suelen no incluir en los exámenes) normalmente aparecen escritas entre paréntesis. La puntuación se ha de conceder si el alumno da la respuesta bien en la forma que precede al paréntesis o bien en la forma que aparece entre paréntesis (de habérsela incluido).

## 10 Calculadoras

*No se permite el uso de calculadoras. El uso de cualquier tipo de calculadora durante la prueba 1 se considera conducta impropia y, como consecuencia de ello, no se concederá ninguna calificación final. Si se topa con un ejercicio que sugiera que el alumno ha utilizado algún tipo de calculadora, siga por favor los procedimientos establecidos para abordar la conducta impropia. Ejemplos: hallar un ángulo a partir de una razón trigonométrica de 0,4235.*

## 11 Estilo

*El objetivo del esquema de calificación es presentar las respuestas mediante una expresión clara, por ejemplo, si la pregunta pide hallar el valor de  $k$ , en el esquema de calificación aparecerá  $k = 3$ , pero los puntos se otorgarán al valor 3 (normalmente no hay necesidad del " $k =$ "). En estos casos, también es usualmente aceptable que el nombre de la variable sea distinto, siempre que no exista ambigüedad en la pregunta, por ejemplo, si la pregunta pide hallar el valor de  $p$  y de  $q$ , entonces la respuesta del alumno ha de ser clara. En general, la única situación donde se requiere la respuesta completa es en una pregunta donde lo que se pide es una ecuación (en este caso, en el esquema de calificación aparecerá "debe ser una ecuación").*

*En el esquema de calificación aparece con frecuencia un texto que describe a qué se deben otorgar los puntos, seguido de ejemplos. Estos ejemplos no son exhaustivos, y los examinadores deben comprobar lo que han escrito los alumnos para ver si satisface las descripciones. Cuando se trata de puntos  $M$ , algunos de los ejemplos que se incluyen pueden presentar una notación deficiente, para indicar lo que es aceptable.*

## 12 Respuestas del alumno

Si el alumno, en las hojas que contienen sus respuestas, ha trazado una línea cubriendo parte del desarrollo de alguna pregunta o si de algún otro modo ha tachado parte del desarrollo de algún ejercicio, no conceda ningún punto por esa parte del desarrollo.

Se supone que los alumnos han de escribir las respuestas a las preguntas de la Sección A en el cuestionario de examen (CE), y las de la Sección B en los cuadernillos de respuestas. En ocasiones los alumnos necesitan más espacio para la Sección A y utilizan el cuadernillo (y con frecuencia así lo indican en el CE) o escriben fuera de las casillas. Este desarrollo hay que calificarlo.

En las instrucciones se les dice a los alumnos que no han de escribir en la Sección B del CE. Así, es posible que hayan utilizado este espacio como hoja borrador, para hacer cálculos que dan por hecho se van a ignorar. Si han escrito soluciones en el cuadernillo de respuestas, no hay necesidad de mirar el CE. Sin embargo, si hay preguntas enteras o apartados enteros que no aparezcan resueltos en el cuadernillo de respuestas, por favor eche un vistazo al CE y compruebe que no estén resueltos ahí. En caso de que lo estén, puntúe esas preguntas enteras o esos apartados enteros que el alumno no escribió en el cuadernillo de respuesta.

### 13. Diagramas

Las indicaciones de cómo puntuar bosquejos (dibujos aproximados) suelen mencionar que el dibujo ha de pasar por determinados puntos o que tiene que tener una serie de características concretas. Estos puntos solo se pueden conceder si el bosquejo tiene (aproximadamente) la forma correcta. Todos los valores que se den en el esquema de calificación constituyen una guía aproximada que indica dónde se encuentran esos puntos/características relevantes. En algunas preguntas el primer **A1** se concede por la forma del bosquejo; en otras, los puntos solo se conceden si aparecen plasmados esos puntos/características relevantes. En ambos casos, a no ser que la forma del bosquejo sea aproximadamente correcta, no se podrá conceder ningún punto (a menos que se indique explícitamente lo contrario). No obstante, si el gráfico está basado en cálculos previos, se deberán conceder puntos **FT** si resulta pertinente.

### 14. Precisión de las respuestas

*Cuando el grado de precisión se especifique en el enunciado de la pregunta, el esquema asignará un punto a la respuesta dada con la precisión requerida. Cuando esto no se especifique en el enunciado de la pregunta, todas las respuestas numéricas se tendrán que dar exactas o con una aproximación de tres cifras significativas.*

No acepte una respuesta final numérica que esté a medias o sin terminar (p. ej.,  $3/0,1$ ), a no ser que se haya indicado explícitamente lo contrario. Como regla general, las respuestas numéricas que consten de más de una parte (como es el caso de las fracciones) se deberían dar utilizando números enteros (p. ej.,  $6/8$ ). Aquellos cálculos que conducen a un número entero se han de terminar, a excepción de aquellas fracciones que no sean números enteros. No es necesario dar los valores intermedios redondeándolos a tres cifras significativas. Más aún, hay que tener presente que si el alumno trabaja con valores redondeados puede acabar obteniendo una respuesta incorrecta; en casos así se ha de conceder un **A0** por la respuesta final.

### Sección A

1. (a) Por una sustitución correcta **(A1)**  
*P. ej.,*  $\frac{1}{2}(2)(6^2)$   
 área = 36 (cm<sup>2</sup>) **A1      N2**  
**[2 puntos]**
- (b) Por utilizar un enfoque válido para hallar la longitud del arco mayor **(M1)**  
*P. ej.,* ángulo =  $2\pi - 2$ , circunferencia – arco BC  
 Por un desarrollo correcto para hallar la longitud del arco mayor **(A1)**  
*P. ej.,*  $6(2\pi - 2)$ ,  $(2 \times 6 \times \pi) - (6 \times 2)$ ,  $12\pi - 12$   
 Por utilizar un enfoque válido para hallar el perímetro de un sector (incluido en algún lugar de la pregunta, no necesariamente este apartado) **(M1)**  
*P. ej.,* arco + 2 (radio),  $12\pi - 12 + 2(6)$   
 perímetro =  $12\pi$  **A1      N1**  
**[4 puntos]**  
**Total [6 puntos]**
2. (a)  $f(1) = 3$  **A1      N1**  
**[1 punto]**
- (b) Por intentar formar la función compuesta (incluyendo el valor numérico) **(M1)**  
*P. ej.,*  $g(3)$ ,  $g(f(1))$   
 $(g \circ f)(1) = 5$  **A1      N2**  
**[2 puntos]**
- (c) Por un enfoque válido **(M1)**  
*P. ej.,*  $g(x) = -2$   
 $g^{-1}(-2) = 1$  **A1      N2**  
**[2 puntos]**  
**Total [5 puntos]**

3. (a) Por un desarrollo correcto (A1)  
*P. ej.,  $-5 + (8 - 1)(3)$*   
 $u_8 = 16$  A1 N2  
 [2 puntos]
- (b) Por sustituir correctamente en la fórmula de  $u_n$  (A1)  
*P. ej.,  $-5 + 3(n - 1), 3n - 8$*   
 Por una ecuación correcta (A1)  
*P. ej.,  $-5 + 3(n - 1) = 67, 3n - 8 = 67, 3(n - 1) = 72$*   
 Por un desarrollo correcto (A1)  
*P. ej.,  $3n = 75, n - 1 = 24$*   
 $n = 25$  A1 N3  
 [4 puntos]
- Total [6 puntos]
4. (a) Por un enfoque correcto (A1)  
*P. ej.,  $3 \log_2 a$*   
 $\log_2 a^3 = 3b$  A1 N2  
 [2 puntos]
- (b) Por un desarrollo correcto (A1)  
*P. ej.,  $\log_2 8 + \log_2 a, \log_2 8 = 3$*   
 $\log_2 8a = 3 + b$  A1 N2  
 [2 puntos]
- (c) Por un desarrollo correcto (A1)  
*P. ej.,  $\frac{\log_2 a}{\log_2 8}, \frac{1}{3} \log_2 a, b \log_8 2$*   
 $\log_8 a = \frac{b}{3}$  A1 N2  
 [2 puntos]
- Total [6 puntos]

**5. MÉTODO 1** (eliminando  $k$ )

Por darse cuenta de que dos vectores paralelos son múltiplos uno de otro **(M1)**

*P. ej.*  $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ ,  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2p \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p+1 \\ 8 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{p+1}{3} = \frac{8}{2p}$ ,  $3k = p+1$  y  $2kp = 8$

Por un desarrollo correcto (tiene que ser cuadrático / de 2.º grado) **(A1)**

*P. ej.*,  $2p^2 + 2p = 24$ ,  $p^2 + p - 12$ ,  $3 = \frac{p^2 + p}{4}$

Por un intento válido de resolver **su** ecuación cuadrática **(M1)**

*P. ej.*, descomponiendo en factores, fórmula, completando el cuadrado

Pruebas de que ha habido un desarrollo correcto (cálculos / razonamientos) **(A1)**

*P. ej.*,  $(p+4)(p-3)$ ,  $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(2)(-24)}}{4}$

$p = -4$ ,  $p = 3$

**A1A1**

**N4**

**MÉTODO 2** (hallando  $k$ )

Por darse cuenta de que dos vectores paralelos son múltiplos uno de otro **(M1)**

*P. ej.*  $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ ,  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2p \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} p+1 \\ 8 \end{pmatrix}$ ,  $3k = p+1$  y  $2kp = 8$

Por un desarrollo correcto (tiene que ser cuadrático / de 2.º grado) **(A1)**

*P. ej.*,  $3k^2 - k = 4$ ,  $3k^2 - k - 4$ ,  $4k^2 = 3 - k$

Por obtener un valor de  $k$  correcto **(A1)**

*P. ej.*,  $k = -1$ ,  $k = \frac{4}{3}$ ,  $k = \frac{3}{4}$

Por sustituir **su(s)** valor(es) de  $k$  **(M1)**

*P. ej.*,  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2p \end{pmatrix} = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} p+1 \\ 8 \end{pmatrix}$ ,  $3 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = p+1$  y  $2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} p = 8$ ,  $(-1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p+1 \\ 8 \end{pmatrix}$

$p = -4$ ,  $p = 3$

**A1A1**

**N4**

*continúa en la pág. siguiente...*

Continuación de la Pregunta 5

**MÉTODO 3** (con ángulos y fórmula de coseno)

Por darse cuenta de que el ángulo entre vectores paralelos es 0 y/o 180° **M1**

P. ej.,  $\cos \theta = \pm 1$ ,  $a \cdot b = |a| |b|$

Por sustituir correctamente en la ecuación el producto escalar y magnitud/módulo **(A1)**

P. ej.,  $\frac{3(p+1)+2p(8)}{\sqrt{3^2+(2p)^2}\sqrt{(p+1)^2+8^2}} = \pm 1$ ,  $19p+3 = \sqrt{4p^2+9}\sqrt{p^2+2p+65}$

Por un desarrollo correcto (debe incluir ambos  $\pm$ ) **(A1)**

P. ej.,  $3(p+1)+2p(8) = \pm\sqrt{3^2+(2p)^2}\sqrt{(p+1)^2+8^2}$ ,  $19p+3 = \pm\sqrt{4p^2+9}\sqrt{p^2+2p+65}$

Por una ecuación cuártica correcta **(A1)**

P. ej.,  $361p^2+114p+9 = 4p^4+8p^3+269p^2+18p+585$ ,  $4p^4+8p^3-92p^2-96p+576 = 0$ ,  
 $p^4+2p^3-23p^2-24p+144 = 0$ ,  $(p+4)^2(p-3)^2 = 0$

$p = -4$ ,  $p = 3$

**A2 N4**

**Total [6 puntos]**

**6. MÉTODO 1** (límites en función de  $x$ )

Por un enfoque válido para hallar la intersección con el eje  $x$  **(M1)**

*P. ej.*,  $f(x) = 0$ ,  $\frac{6-2x}{\sqrt{16+6x-x^2}} = 0$ ,  $6-2x = 0$

Intersección con el eje  $x$  es 3 **(A1)**

Por un enfoque válido utilizando sustitución o inspección **(M1)**

*P. ej.*,  $u = 16+6x-x^2$ ,  $\int_0^3 \frac{6-2x}{\sqrt{u}} dx$ ,  $du = 6-2x$ ,  $\int \frac{1}{\sqrt{u}}$ ,  $2u^{\frac{1}{2}}$ ,

$$u = \sqrt{16+6x-x^2}, \frac{du}{dx} = (6-2x) \frac{1}{2} (16+6x-x^2)^{-\frac{1}{2}}, \int 2 du, 2u$$

$\int f(x) dx = 2\sqrt{16+6x-x^2}$  **(A2)**

Por sustituir **ambos de su(s)** límites en **su** función integrada y restar **(M1)**

*P. ej.*,  $2\sqrt{16+6(3)-3^2} - 2\sqrt{16+6(0)^2-0^2}$ ,  $2\sqrt{16+18-9} - 2\sqrt{16}$

**Nota:** Conceda **M0** si han sustituido en función original o función derivada.  
No acepte “- 0” como evidencia de sustituir límite inferior

Por un desarrollo correcto **(A1)**

*P. ej.*,  $2\sqrt{25} - 2\sqrt{16}$ ,  $10 - 8$

área = 2 **A1**      **N2**

*continúa en la pág. siguiente...*

Continuación de la Pregunta 6

**MÉTODO 2** (límites en función de  $u$ )

Por un enfoque válido para hallar la intersección con el eje  $x$  **(M1)**

*P. ej.*,  $f(x) = 0$ ,  $\frac{6-2x}{\sqrt{16+6x-x^2}} = 0$ ,  $6-2x = 0$

Intersección con el eje  $x$  es 3 **(A1)**

Por un enfoque válido utilizando sustitución o inspección **(M1)**

*P. ej.*,  $u = 16 + 6x - x^2$ ,  $\int_0^3 \frac{6-2x}{\sqrt{u}} dx$ ,  $du = 6 - 2x$ ,  $\int \frac{1}{\sqrt{u}}$ ,  
 $u = \sqrt{16 + 6x - x^2}$ ,  $\frac{du}{dx} = (6 - 2x) \frac{1}{2} (16 + 6x - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\int 2 du$

Integración correcta **(A2)**

*P. ej.*,  $\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2u^{\frac{1}{2}}$ ,  $\int 2 du = 2u$

Ambos límites correctos para  $u$  **(A1)**

*P. ej.*,  $u = 16$  y  $u = 25$ ,  $\int_{16}^{25} \frac{1}{\sqrt{u}} du$ ,  $\left[ 2u^{\frac{1}{2}} \right]_{16}^{25}$ ,  
 $u = 4$  y  $u = 5$ ,  $\int_4^5 2 du$ ,  $[2u]_4^5$

Por sustituir **ambos** de **su(s)** límites para  $u$  (no acepte 0 y 3) en **su** función integrada y restar **(M1)**

*P. ej.*,  $2\sqrt{25} - 2\sqrt{16}$ ,  $10 - 8$

**Nota:** Conceda **M0** si han sustituido en función original o función derivada, o si no han intentado encontrar límites para  $u$ .

área = 2

**A1**

**N2**

**Total [8 puntos]**

**7. MÉTODO 1**

Por sustituir correctamente en la fórmula de  $\cos(2x)$  o  $\sin(2x)$  **(A1)**

*P. ej.*,  $1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ,  $2\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2 - 1$ ,  $2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$\cos(2x) = \frac{7}{9}$  o  $\sin(2x) = \frac{2\sqrt{8}}{9}$   $\left( = \frac{\sqrt{32}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9} \right)$  (vale también si se ha incluido en el paso de la sustitución) **A2**

Por darse cuenta de que  $4x$  es el ángulo doble de  $2x$  (vale también si se ha incluido en cualquier otro lugar de la pregunta) **(M1)**

*P. ej.*,  $\cos(2(2x))$ ,  $2\cos^2(2\theta) - 1$ ,  $1 - 2\sin^2(2\theta)$ ,  $\cos^2(2\theta) - \sin^2(2\theta)$

Por sustituir correctamente utilizando **su** valor de  $\cos(2x)$  y/o  $\sin(2x)$  en la fórmula de  $\cos(4x)$  **(A1)**

*P. ej.*,  $2\left(\frac{7}{9}\right)^2 - 1$ ,  $\frac{98}{81} - 1$ ,  $1 - 2\left(\frac{2\sqrt{8}}{9}\right)^2$ ,  $1 - \frac{64}{81}$ ,  $\left(\frac{7}{9}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{8}}{9}\right)^2$ ,  $\frac{49}{81} - \frac{32}{81}$

$\cos(4x) = \frac{17}{81}$  **A1** **N2**

**MÉTODO 2**

Por darse cuenta de que  $4x$  es el ángulo doble de  $2x$  (vale también si se ha incluido en cualquier otro lugar de la pregunta) **(M1)**

*P. ej.*,  $\cos(2(2x))$

Identidad de ángulo doble de  $2x$  **(M1)**

*P. ej.*,  $2\cos^2(2\theta) - 1$ ,  $1 - 2\sin^2(2x)$ ,  $\cos^2(2\theta) - \sin^2(2\theta)$

Expresión correcta para  $\cos(4x)$  en función de  $\sin x$  y/o  $\cos x$  **(A1)**

*P. ej.*  $2(1 - 2\sin^2\theta)^2 - 1$ ,  $1 - 2(2\sin x \cos x)^2$ ,  $(1 - 2\sin^2\theta)^2 - (2\sin\theta \cos\theta)^2$

Por sustituir correctamente los valores de  $\sin x$  y/o  $\cos x$  **A1**

*P. ej.*  $2\left(1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^2 - 1$ ,  $2\left(1 - 4\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^4\right) - 1$ ,  $1 - 2\left(2 \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{8}}{3}\right)^2$

Por un desarrollo correcto **(A1)**

*P. ej.*  $2\left(\frac{49}{81}\right) - 1$ ,  $1 - 2\left(\frac{32}{81}\right)$ ,  $\frac{49}{81} - \frac{32}{81}$

$\cos(4x) = \frac{17}{81}$  **A1** **N2**

**Total [6 puntos]**

**Sección B**

8. (a) Por un enfoque válido **(M1)**  
*P. ej.*,  $f(x) = 0$ ,  $x^2 - 4x - 5 = 0$
- Por un intento válido de resolver la ecuación cuadrática **(M1)**  
*P. ej.*, descomponiendo en factores, fórmula, completando el cuadrado
- Pruebas de que ha habido un desarrollo correcto (cálculos / razonamientos) **(A1)**  
*P. ej.*,  $(x-5)(x+1)$ ,  $x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-5)}}{2}$
- $x = -1$ ,  $x = 5$  (acepte  $(-1, 0)$ ,  $(5, 0)$ ) **A1A1** **N3**  
[5 puntos]
- (b) Por un desarrollo correcto **(A1)**  
*P. ej.*,  $\frac{-(-4)}{2(1)}$ ,  $\frac{-1+5}{2}$
- $x = 2$  (ha de ser una ecuación de  $x =$ ) **A1** **N2**  
[2 puntos]
- (c) (i)  $h = 2$  **A1** **N1**
- (ii) **MÉTODO 1**
- Por un enfoque válido **(M1)**  
*P. ej.*,  $f(2)$
- Por una sustitución correcta **(A1)**  
*P. ej.*,  $(2)^2 - 4(2) - 5$
- $k = -9$  **A1** **N2**
- MÉTODO 2**
- Por un intento válido de completar el cuadrado **(M1)**  
*P. ej.*,  $x^2 - 4x + 4$
- Por unos cálculos correctos **(A1)**  
*P. ej.*,  $(x^2 - 4x + 4) - 4 - 5$ ,  $(x-2)^2 - 9$
- $k = -9$  **A1** **N2**  
[4 puntos]

continúa en la pág. siguiente...

Continuación de la Pregunta 8

(d) **MÉTODO 1** (trabajando con el vértice)

- El vértice de  $f$  está en  $(2, -9)$  **(A1)**
- Por realizar correctamente la simetría horizontal **(A1)**  
*P. ej.*,  $x = -2$ ,  $(-2, -9)$
- Por un enfoque válido de la traslación de **su** valor de  $x$  o  $y$  **(M1)**  
*P. ej.*,  $x - 3$ ,  $y + 6$ ,  $\begin{pmatrix} -2 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ , un valor correcto del vértice
- El vértice de  $g$  es  $(-5, -3)$  (acepte  $x = -5$ ,  $y = -3$ ) **A1A1 N1N1**

**MÉTODO 2** (trabajando con la función)

- Por enfoque correcto de simetría horizontal **(A1)**  
*P. ej.*,  $f(-x)$
- Por realizar correctamente la simetría horizontal **(A1)**  
*P. ej.*,  $(-x)^2 - 4(-x) - 5$ ,  $x^2 + 4x - 5$ ,  $(-x - 2)^2 - 9$
- Por un enfoque válido de traslación de **su** valor de  $x$  o  $y$  **(M1)**  
*P. ej.*,  $(x + 3)^2 + 4(x + 3) - 5 + 6$ ,  $x^2 + 10x + 22$ ,  $(x + 5)^2 - 3$ , un valor correcto del vértice
- El vértice de  $g$  es  $(-5, -3)$  (acepte  $x = -5$ ,  $y = -3$ ) **A1A1 N1N1**

**[5 puntos]**

**Total [16 puntos]**

9. (a) (i)  $\frac{2}{n}$  **A1** **N1**

(ii) Si se halla correctamente la probabilidad correspondiente a una de las extracciones **A1**

*P. ej.*,  $P(\text{no sea azul a la primera}) = \frac{n-2}{n}$ , azul a la segunda  $= \frac{2}{n-1}$

Por un enfoque válido **(M1)**

*P. ej.*, por darse cuenta de que hay que perder en la primera para ganar en la segunda,

$P(B' \text{ y, a continuación, } B)$ ,  $P(B') \times P(B | B')$ , diagrama de árbol

Por hallar una expresión correcta en función de  $n$  **A1** **N3**

*P. ej.*,  $\frac{n-2}{n} \times \frac{2}{n-1}$ ,  $\frac{2n-4}{n^2-n}$ ,  $\frac{2(n-2)}{n(n-1)}$

**[4 puntos]**

(b) (i) Por un desarrollo correcto **(A1)**

*P. ej.*,  $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3}$

$\frac{12}{60} \left( = \frac{1}{5} \right)$  **A1** **N2**

(ii) Por un desarrollo correcto **(A1)**

*P. ej.*,  $\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{2}$

$\frac{6}{60} \left( = \frac{1}{10} \right)$

**A1** **N2**  
**[4 puntos]**

*continúa en la pág. siguiente...*

Continuación de la Pregunta 9

- (c) Por probabilidades correctas (incluido en algún lugar de la pregunta, no necesariamente este apartado) (A1)(A1)

*P. ej.*,  $P(1) = \frac{2}{5}$ ,  $P(2) = \frac{6}{20}$  (vale también si se han incluido en el diagrama de árbol)

Por un enfoque válido para hallar  $E(M)$  o las ganancias esperadas utilizando **sus** probabilidades (M1)

*P. ej.*,  $P(1) \times (0) + P(2) \times (20) + P(3) \times (8k) + P(4) \times (12k)$ ,  
 $P(1) \times (-20) + P(2) \times (0) + P(3) \times (8k - 20) + P(4) \times (12k - 20)$

Por un desarrollo correcto del ejercicio para hallar  $E(M)$  o las ganancias esperadas (A1)

*P. ej.*,  $\frac{2}{5}(0) + \frac{3}{10}(20) + \frac{1}{5}(8k) + \frac{1}{10}(12k)$ ,  
 $\frac{2}{5}(-20) + \frac{3}{10}(0) + \frac{1}{5}(8k - 20) + \frac{1}{10}(12k - 20)$

Por la ecuación correcta correspondiente a un juego justo A1

*P. ej.*,  $\frac{3}{10}(20) + \frac{1}{5}(8k) + \frac{1}{10}(12k) = 20$ ,  $\frac{2}{5}(-20) + \frac{1}{5}(8k - 20) + \frac{1}{10}(12k - 20) = 0$

Por un desarrollo correcto donde se combinen los términos en  $k$  (A1)

*P. ej.*,  $-8 + \frac{14}{5}k - 4 - 2 = 0$ ,  $6 + \frac{14}{5}k = 20$ ,  $\frac{14}{5}k = 14$

$k = 5$

A1      N0

**Nota:** No conceda el **A1** final si las probabilidades de **FT** no suman 1.

[7 puntos]

**Total [15 puntos]**

10. (a) Por un enfoque válido **(M1)**  
*P. ej.,  $f(0)$ ,  $0^3 - 2(0)^2 + a(0) + 6$ ,  $f(0) = 6$ ,  $(0, y)$*   
 *$(0, 6)$  (acepte  $x = 0$  e  $y = 6$ )* **A1** **N2**  
**[2 puntos]**
- (b) (i)  $f' = 3x^2 - 4x + a$  **A2** **N2**
- (ii) Por un enfoque válido **(M1)**  
*P. ej.,  $f'(0)$*   
 Por un desarrollo correcto **(A1)**  
*P. ej.,  $3(0)^2 - 4(0) + a$ , pendiente =  $a$ ,  $f'(0) = a$*   
 Por intentar sustituir la pendiente y las coordenadas en la ecuación de la recta **(M1)**  
*P. ej.,  $y - 6 = a(x - 0)$ ,  $y - 0 = a(x - 6)$ ,  $6 = a(0) + c$ ,  $L = ax + 6$*   
 Por una ecuación correcta **A1** **N3**  
*P. ej.,  $y = ax + 6$ ,  $y - 6 = ax$ ,  $y - 6 = a(x - 0)$*   
**[6 puntos]**
- (c) Por un enfoque válido para hallar la intersección (punto de corte) **(M1)**  
*P. ej.,  $f(x) = L$*   
 Por una ecuación correcta **(A1)**  
*P. ej.,  $x^3 - 2x^2 + ax + 6 = ax + 6$*   
 Por un desarrollo correcto **(A1)**  
*P. ej.,  $x^3 - 2x^2 = 0$ ,  $x^2(x - 2) = 0$*   
 *$x = 2$  en Q* **(A1)**  
 Por un enfoque válido para hallar el mínimo **(M1)**  
*P. ej.,  $f'(x) = 0$*   
 Por una ecuación correcta **(A1)**  
*P. ej.,  $3x^2 - 4x + a = 0$*   
 Por haber sustituido su valor de  $x$  en Q en su ecuación,  $f'(x) = 0$  **(M1)**  
*P. ej.,  $3(2)^2 - 4(2) + a = 0$ ,  $12 - 8 + a = 0$*   
 *$a = -4$*  **A1** **N0**  
**[8 puntos]**

**Total [16 puntos]**